# 相机标定

## 定义

获得相机的内部参数以及外部参数。

## 分类

目前标定方法可以大致分为传统标定方法、主动标定方法和自标定方法三类。

#### 传统摄像机标定方法

传统的摄像机标定方法需要形状规则，集几何信息已知的标定模板。。通过对一幅以上图像特征点的提取和处理，简历标定物和拍摄图像之间的约束关系，形成关于摄像机内外参数的标定方程。目前，在传统摄像机标定中，比较典型的方法有：

1. 最优化的摄像机标定方法

该方法考虑了标定过程中各种失真的情况，成像模型非常复杂，很难控制结果的精度。同时成像模型的初始值对于结果的精度也有很大的影响。根据选择不同的标定模型，比较典型的最优化标定法可以分为两种，分别是基于摄影测量学的传统标定法和直接线性变换法。

1. 利用透视变换矩阵的标定方法

在摄影测量学中，可以用摄像机的内部参数和外部参数共同构成的非线性方程来描述二维图像坐标系和三维空间坐标系之间的相互关系。如果忽略摄像机镜头畸变的影响，将一组三维空间点和相应的图像点作为已知，而将透视变换矩阵中的元素作为未知，这样可以利用线性的方法来求解透视变换矩阵当中的各个元素。

从某种意义上来讲，该方法与直接线性标定方法没有本质的区别。利用透视变换矩阵的标定方法，不需要通过最优化的方法来求解摄像机的参数，可以提高标定的速度，而且能够实时的获取标定的结果，但同样也存在不足，因为在标定过程当中忽略了非线性畸变的影响，从而影响了结果的精度。

1. 考虑畸变影响的两步法

为了提高摄像机标定结果的精度，可以利用以上两种方法(直接线性标定方法和利用摄像机透视变换矩阵的标定方法)的标定结果作为初值，同时考虑非线性畸变的影响，然后再利用最优化方案，进一步提高精度，这样既可以克服初值对标定结果的影响，同时还能兼顾非线性畸变因素的影响，这种标定方法结合了前面两类方法的思想，将每一种标定方法的优势与不足之处结合到一起，形成了一种新颖的摄像机标定方法，这便是两步法的标定思想。

目前，经典的两部法是由Tsai所提出来的，该方法先用径向约束，求解模型中的大部分参数，再用非线性方程求解畸变系数，有效焦距等。

#### 自标定方法

自标定方法的目的是想让摄像机在未知场景和沿任意方向运动等一般情形下完成摄像机标定。自标定方法最大的优势在于不需要制作特定的标定模版来实现标定，它是一种对环境具有很强适应性的标定方法，可以利用环境的刚体变换，通过对比分析多幅图像中的对应点来获取摄像机参数。目前典型的关于摄像机自标定方法大致可以分为基于绝对二次曲线的自标定法、基于绝对二次曲面的自标定法、分层逐步标定法和其他改进的摄像机自标定技术。

#### 基于主动视觉的自标定法

基于主动视觉的摄像机自标定方法要求摄像机作特殊的运动来获得多幅图像，因此摄像机将被精确的安装在控制平台上，然后利用摄像机可控制的运动参数和图像来求解摄像机的内部参数和外部参数。其中比较典型的就是让摄像机作纯旋转运动和正交平移的运动。

## 张正友经典标定法

张正友于1998年在论文："A Flexible New Technique for Camera Calibration"提出了基于单平面棋盘格的相机标定方法。该方法介于传统的标定方法和自标定方法之间，使用简单实用性强，有以下优点：

* 不需要额外的器材，一张打印的棋盘格即可。
* 标定简单，相机和标定板可以任意放置。
* 标定的精度高。

设为场景中的一点，在针孔相机模型中，经过以下变换最终得到像素图像上的像点:

* 从世界坐标系通过刚体变换到相机坐标系
* 从相机坐标系通过透视变换得到成像平面上的点
* 通过仿射变换得到像素坐标系上的点

## 内参的约束条件

将上述过程整理成变换矩阵的形式：

令相机的内参矩阵为K：

在张氏标定法中，用于标定的棋盘格是三维场景中的一个平面，其在成像平面的像是另一个平面π，知道了两个平面的对应点的坐标，就可以用8点法求解得到两个平面的单应矩阵H。

设棋盘格所在的平面为世界坐标系中的平面，这样棋盘格的任一角点的世界坐标可表示为，根据小孔相机模型：

得到单应矩阵H和相机矩阵（包含内参和外参）的关系：

将旋转矩阵R的各个列向量和平移向量t使用H的列向量表示，

又由于R是正交矩阵，其任意两个列向量的内积为0，列向量的模为1。故有：

则对于一幅棋盘标定版的图像（一个单应矩阵）可以获得两个对内参数的约束等式：

只要能通过单应矩阵H求解内参矩阵K，就能完成相机标定。

## 内参求解

令，因为B是对称矩阵包含6个未知项，写成向量的形式：

将用替换，整理后得到

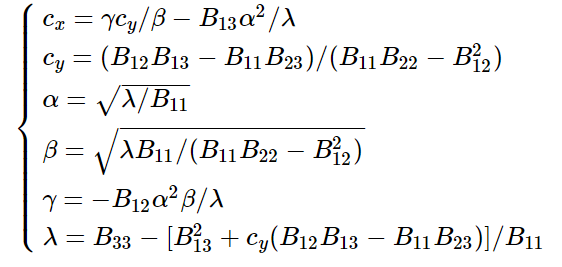
将两个约束条件合并成一个矩阵形式，从一副图像的单应矩阵中可得到：

假设有n幅图像，则有：

其中为的矩阵，所以有

* 当n≥3，可以得到b的唯一解;
* 当n=2，则可以假设扭曲参数γ=0作为额外的约束条件
* 当n=1，则值能计算两个相机的内参数

对于方程可以使用SVD求得其最小二乘解，从而可以得到相机的各个内参数：



## 最大似然估计

上面使用最小二乘法得到估计得到的解，并没有物理上的实际意义，。为了进一步增加标定结果的可靠性，可以使用最大似然估计(Maximum likelihood estimation)来优化上面估计得到的结果。

假设同一相机从n个不同的角度的得到了n幅标定板的图像，每幅图像上有m个像点。表示第i幅图像上第j个像点对应的标定板上的三维点，则通过下式计算出像点的位置：

其中，表示第i幅图像对应相机的旋转矩阵和平移向量。则像点的概率密度函数是

构造似然函数：

要使得L最小，就要最小化下列值：

这是一个非线性优化问题，可以使用Levenberg-Marquardt的方法，利用上面得到的解作为初始值，迭代得到最优解。